

# Física de juguetes y dispositivos sencillos. Peonzas invertibles

J. Güémez

*Departamento de Física Aplicada*  
Universidad de Cantabria

Septiembre 25, 2007

## Resumen

Se analiza el movimiento de una peonza invertible (*tippe-top*) y su relación con el comportamiento de huevos cocidos rotantes. En ambos casos el centro de gravedad del sistema se eleva contra el campo gravitatorio, en un movimiento que transforma parte de la energía cinética del sistema en energía potencial gravitatoria.

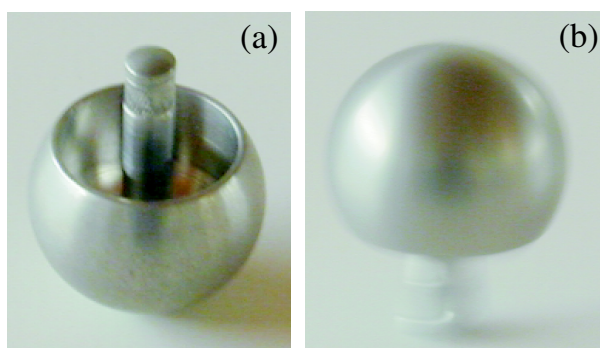


Figura 1: Peonza invertible (*tippe top*). (a) Peonza en reposo. (b) Peonza girando en posición invertida

El *tippe top* o peonza invertible <sup>1</sup> es una peonza que consta de una esfera con su casquete superior seccionado y una pequeña barrita que sirve para hacerle girar. Cuando esta peonza se hace girar desde su posición de equilibrio, sobre el polo inferior de la esfera, si se hace girar suficientemente deprisa termina por darse la vuelta y girar sobre la barrita <sup>2</sup>.

<sup>1</sup>A R del Campo, *Tippe top (topsy-turnee top) continued*, Am. J. Phys. **23** , 544-545 (1955)

<sup>2</sup>J B Hart, *Angular momentum and tippe top*, Am. J. Phys. **27** , 189 (1954); I M Freeman, *The Tippe top again*, Am. J. Phys. **24** , 178 (1956). En este artículo se sugiere que el



Figura 2: Niels Bohr y Wolfgang Pauli observando un Tippe-top

Una primera observación de este comportamiento indica que la peonza gira más lentamente (menor velocidad angular) cuando está invertida, girando sobre la barrita, que cuando comienza a girar (mayor velocidad angular) y lo hace sobre la esfera.

El momento angular inicial  $L_i$  y la energía cinética inicial  $K_i$ , vienen dadas por

$$L_i = I\omega_i; K_i = \frac{1}{2}I\omega_i^2, \quad (1)$$

donde  $I$  es el momento de inercia respecto del eje  $YY'$  y  $\omega_i$  es la velocidad angular inicial. Se ha tomado la energía potencial inicial,  $V_i = 0$ , como nula.

Una vez la peonza se ha invertido, el centro de gravedad ha ascendido una distancia

$$R + d + h - (R - h) = d + 2h. \quad (2)$$

Si el peso de la peonza es  $W = mg$ , la energía potencial final será  $V_f = mg(2h + d)$ , con lo que aplicando el principio de conservación de la energía (se

---

momento angular se invierte, pasando de apuntar hacia abajo al principio a apuntar hacia arriba al final. G Barnes, *Tippe top thoughts*, The Physics Teacher **25**, 200 (1987). En este artículo se indica que hay un momento en que la rotación de la peonza respecto de su propio eje se detiene para empezar a girar en sentido contrario, es decir, que el momento angular cambia de dirección desde la posición inicial, apuntando hacia abajo, hasta la posición final, apuntando hacia arriba.

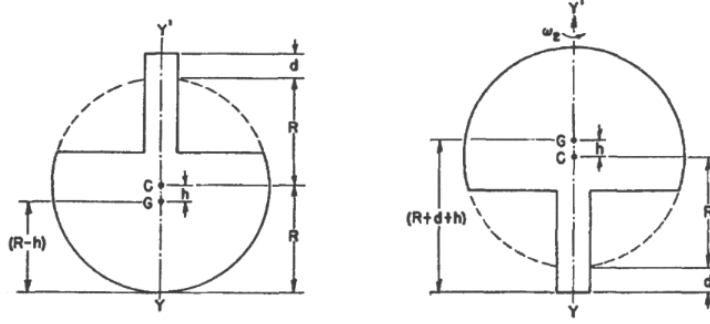


Figura 3: Características geométricas de un tippe top en reposo y cuando ha completado una vuelta y gira sobre la barrita.

supone que no hay pérdidas por rozamiento),

$$E_f = \frac{1}{2}I\omega_f^2 + mg(2h + d) = E_i = \frac{1}{2}I\omega_i^2, \quad (3)$$

de donde se obtiene fácilmente que  $\omega_f < \omega_i$ . Parte de la energía cinética inicial de la peonza se emplea en aumentar la energía potencial, por lo que la energía cinética final es menor que la inicial.

Este resultado permite obtener que debe ser además,  $L_f = I\omega_f < L_i = I\omega_i$ . Es decir, aunque se conserva la energía de la peonza, su momento angular disminuye. Este resultado implica que algún torque externo, debido a alguna fuerza externa, se ha aplicado, de tal forma que el momento angular ha ido disminuyendo. Si se observa el movimiento de la peonza, se concluye que sólo el rozamiento (que no debe ser importante para eliminar energía mecánica pero sí como para conseguir la inversión de la peonza) puede proporcionar esa fuerza externa. Admitiendo ahora que el torque  $T$  debido al rozamiento transforma parte de la energía en calor,  $Q$ , se tiene que

$$\frac{1}{2}I\omega_i^2 = \frac{1}{2}I\omega_f^2 + mg(2h + d) + Q, \quad (4)$$

y

$$I\omega_i = I\omega_f + \int_0^{t_0} T dt, \quad (5)$$

siendo  $t_0$  el tiempo que está rotando la peonza hasta que se invierte.

Una observación relativa al comportamiento de la peonza, aunque no es fácil de realizar, es que el momento angular apunta en la misma dirección al comienzo de la rotación y cuando la peonza se ha invertido. Si se pinta una flecha sobre la peonza de tal forma que la punta de la flecha apunte en la misma dirección del giro (por ejemplo, sentido dextrógiro), cuando la peonza se ha invertido la flecha gira con la cola avanzando antes que la punta, mientras que la peonza sigue girando en el mismo sentido (dextrógiro). Es decir, cuando

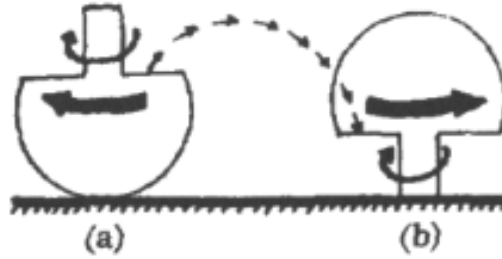


Figura 4: Tippe top. (a) Posición al comenzar la rotación, con una flecha pintada sobre la peonza e indicando en qué dirección está girando (dextrogiro, momento angular apuntado hacia abajo). (b) Posición invertida, con la flecha pintada apuntando en diferente sentido, pero la peonza girando del mismo modo que al principio (dextrogiro).

la peonza empieza a girar y se invierte, el giro final es el mismo que el inicial y diferente del giro que se produciría si uno, con mucho cuidado, empezara a girar la peonza y en el último momento la invirtiera antes de ponerla sobre la mesa.

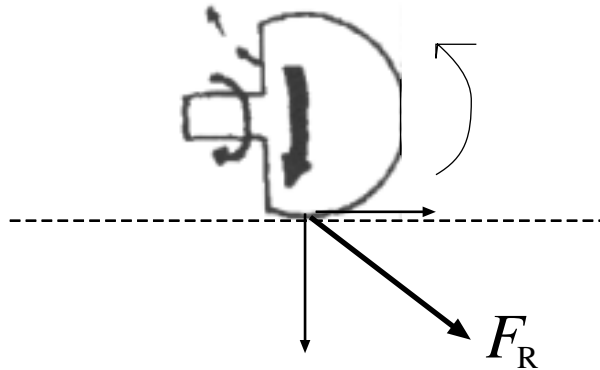


Figura 5: Cuando el tippe top gira sobre la mesa, la fuerza del rozamiento tiene una componente que tiende a disminuir el momento angular intrínseco, pero sin eliminarlo, mientras que la otra componente de la fuerza de rozamiento tiende a invertir la peonza.

Que la rotación intrínseca de la peonza no es responsable directa de la inversión se puede mostrar apoyando la peonza sobre la mesa con el mango horizontal, paralelo a la superficie de la mesa (esta posición es inestable, y se alcanza desde la posición estable gracias a la rotación de la peonza), y haciéndola girar. En este caso, la peonza se invierte, aunque permanece muy poco tiempo en vertical debido a que no tiene un giro intrínseco que la estabilice.

Un huevo cocido <sup>3</sup> presenta un comportamiento semejante al de una peonza invertible en el sentido de que si comienza a girar sobre la región de mayor radio de curvatura, se eleva su centro de gravedad hasta terminar por girar alrededor de sus extremos con menor radio de curvatura <sup>4</sup>. La rotación alrededor de un eje sobre el cual la masa no está distribuida simétricamente y cuyo momento de inercia es grande resulta ser inestable, apareciendo fuerzas que tienden a que el objeto gire alrededor de ejes de simetría. Si  $r_i$  fuese la componente del vector posición, perpendicular al eje de rotación  $z$ , la suma de todas esas fuerzas viene dada por

$$F = \sum m_i \omega^2 r_i. \quad (6)$$

Esta fuerza se anula cuando el eje de rotación sea un eje de simetría y, de un modo general, siempre que para cada punto material en  $r_i$  exista otro en  $-r_i$ . Sobre un eje tal no se ejerce ninguna fuerza y el cuerpo puede rotar sobre sí mismo, incluso sin necesidad de apoyo <sup>5</sup> Por eso, a este tipo de ejes se les denomina *eje libre*. Todo cuerpo tiene tres ejes principales de inercia, sobre los cuales, en una rotación, no se ejercen fuerzas ni momentos cinéticos, siendo, por lo tanto, ejes libres. Estos ejes principales de inercia son los ejes principales del elipsoide del tensor de inercia. Este elipsoide se obtiene del modo siguiente: se hacen pasar por el centro de gravedad G del cuerpo todos los ejes posibles; se determina el momento de inercia  $I$  para cada uno de ellos, y se mide, sobre cada uno de ellos y a partir del centro de gravedad la distancia  $1/\sqrt{I}$ . Los extremos de todos estos rayos se sitúan sobre un elipsoide que, como todo elipsoide,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (7)$$

tiene tres ejes principales,  $a$ ,  $b$  y  $c$ . El más corto de estos ejes corresponde al máximo momento de inercia y al revés, el mayor eje al menor momento de inercia. Son pues posibles rotaciones libres en torno a todos estos tres ejes principales, pero sólo alrededor del eje máximo y del mínimo estas rotaciones son estables. Un paralelepípedo sólo rueda alrededor de su eje  $A_2$  (izquierda-derecha) durante un corto intervalo de tiempo <sup>6</sup> y se transforma en una rotación alrededor del eje  $A_1$  (arriba-abajo) o  $A_3$  (delante-atrás).

En el caso de un huevo cocido que rota sobre el eje en que se apoya sobre la mesa, que no es un eje principal ni de simetría, la distribución de masa es tal que la parte más alargada ejerce una fuerza no compensada en dirección

<sup>3</sup>K Sasaki, *Spinning eggs—which end will rise?*, Am. J. Phys. **72**, 775-781 (2004). Se analiza el comportamiento de huevos cocidos rotantes, que se comportan como un tippe top.

<sup>4</sup>Philippe L. Lamy and Joseph A. Burns, *Geometrical Approach to Torque Free Motion of a Rigid Body Having Internal Energy Dissipation*, Am. J. Phys. **40**, 441-444 (1972)

<sup>5</sup>En general, cuando un cuerpo gira alrededor de un eje, apoyado en dos puntos que lo fijan, sobre los apoyos se ejercerá una fuerza, excepto en los casos comentados.

<sup>6</sup>D A Wardle, *Unstable rotation of rigid bodies in empty space*, The Physics Teacher **39**, 334-335 (2001) Se analiza el papel de los ejes principales de rotación de un cuerpo sólido.

horizontal que da lugar a un momento que tiende a girarlo y que eleve el centro de gravedad. Mientras el huevo gire sobre un eje que no sea el de simetría, ese momento continuará. Cuando rueda sobre su eje de simetría, que es un eje principal, el más largo, la rotación es estable <sup>7</sup>.

Para una persona los ejes principales de inercia se determinan con la mano derecha: eje  $x$  va de derecha a izquierda, el  $y$  de arriba abajo y el  $z$  de frente a atrás. Los momentos de inercia a través de esos ejes son mínimo para  $I_{yy}$  y máximo para  $I_{zz}$ , por lo que la rotación alrededor del eje  $I_{xx}$  es inestable. En el sistema de laboratorio

$$\tau = \left( \frac{dL}{dt} \right)_L, \quad (8)$$

donde  $\tau$  es el torque externo. Sea  $\omega$  la velocidad angular de rotación de los ejes del cuerpo respecto del sistema de laboratorio. Haciendo la transformación de coordenadas respecto del sistema de referencia fijo en el cuerpo,

$$\left( \frac{dL}{dt} \right)_L = \left( \frac{dL}{dt} \right)_B + (\omega \times L)_B. \quad (9)$$

Para una rotación libre  $\tau = 0$  y

$$\left( \frac{dL}{dt} \right)_B = -(\omega \times L)_B. \quad (10)$$

La solución de esta ecuación es la descripción del momento angular  $L$  relativo a los ejes principales del cuerpo. Con  $L_x = I_{xx}\omega_x$ ,  $L_y = I_{yy}\omega_y$  y  $L_z = I_{zz}\omega_z$ , se tiene

$$\begin{aligned} I_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} &= (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z, \\ I_{yy} \frac{d\omega_y}{dt} &= (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x, \\ I_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} &= (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y, \end{aligned}$$

que son las ecuaciones de Euler de un cuerpo que gira libremente. Para un movimiento libre de momentos  $dL/dt = 0$  y con  $L = \vec{I} \cdot \vec{\omega}$ , se tiene

$$I_{xx}^2\omega_x^2 + I_{yy}^2\omega_y^2 + I_{zz}^2\omega_z^2 = L^2, \quad (11)$$

y

$$I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 = 2T, \quad (12)$$

donde  $T$  es la energía cinética de rotación. En función de las componentes del momento angular,

$$L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L^2, \quad (13)$$

---

<sup>7</sup>P A Lightsey, *An analysis of the rotational stability of the layout back somersault*, Am. J. Phys. **51**, 115-118 (1983).

y

$$\frac{L_x^2}{2TI_{xx}} + \frac{L_y^2}{2TI_{yy}} + \frac{L_z^2}{2TI_{zz}} = 1. \quad (14)$$

Cada una de estas construcciones es un elipsoide y para que se conserven simultáneamente el momento angular y la energía,  $L$  debe girar sobre la curva,  $C$ , una esfera, en la que se cortan ambos elipsoides. Con

$$\begin{aligned} 2TI_{xx} &= I_{xx}^2\omega_x^2 + I_{xx}I_{yy}\omega_y^2 + I_{xx}I_{zz}\omega_z^2, \\ 2TI_{zz} &= I_{zz}I_{xx}\omega_x^2 + I_{zz}I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}^2\omega_z^2, \end{aligned}$$

si  $I_{xx} < I_{yy} < I_{zz}$ , entonces

$$2TI_{xx} \leq L^2 \leq 2TI_{zz}. \quad (15)$$

Las igualdades se cumplen cuando el sistema gira alrededor de sus ejes principales máximo o mínimo.

Para diferentes energía, las variaciones de  $L$  son

$$\begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= (I_{yy} - I_{zz}) \frac{L_y L_z}{I_y I_z}, \\ \frac{dL_y}{dt} &= (I_{zz} - I_{xx}) \frac{L_z L_x}{I_z I_x}, \\ \frac{dL_z}{dt} &= (I_{xx} - I_{yy}) \frac{L_x L_y}{I_x I_y}, \end{aligned}$$

que son curvas cerradas sobre la esfera  $C$ , lo que demuestra que el movimiento es periódico. Pero estas curvas rodean los ejes  $x$  y  $z$  y pasan por  $y$ . Eso significa que cualquier pequeña perturbación del movimiento alrededor de  $x$  o  $z$  se mantendrá cerca de los mismos ejes, pero que una perturbación en  $y$  hará que el sistema se aleje del mismo hacia  $x$  o  $z$ .

Cuando hay disipación de energía, se llega a una rotación pura alrededor de los ejes principales estables, que es la mínima energía para un momento angular dado. Así, rotar cuerpos con mecanismos internos de rozamiento, imperfecciones elásticas, llevará siempre a que el sistema alcance la mínima energía para cada configuración, es decir, la rotación alrededor de su eje principal de máxima inercia.